

复数

孙长明

2010/10/29 13:17:10

目录

1 复数域	1
1.1 复数的基本定义	1
1.2 数域的封闭性	2
1.2.1 加法	2
1.2.2 乘法	2
1.2.3 分配律	3
1.3 复数的代数形式	4
1.4 复数的模	4
2 复向量空间	5

1 复数域

1.1 复数的基本定义

定义 1. 一个复数是个满足以下条件关系的有序实数对 (a,b) :

1. 设 $x=(a,b),y=(c,d)$ 是两个复数, 当且仅当 $a=c$ 并且 $b=d$ 时 $x=y$;
2. 加法: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
3. 乘法: $(a,b) \times (c,d) = (a \times c - b \times d, a \times d + b \times c)$

1.2 数域的封闭性

我们将所有的复数的集合记做 C .

$$C = \{(a, b) | a \in R, b \in R\}$$

下面我们来证明所有的复数构成一个数域。即它的加法和乘法是封闭的。

1.2.1 加法

定理 1. 如果 $x \in C, y \in C$, 那么 $x + y \in C$.

证明. 显然 □

定理 2. 如果 $x \in C, y \in C$, 那么 $x + y = y + x$.

证明. 设 $x = (a, b), y = (c, d)$.

$$\text{则 } x + y = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, b + d) = y + x \quad \square$$

定理 3. 如果 $x, y, z \in C$, 那么 $(x + y) + z = x + (y + z)$.

证明. 设 $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$

则

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = x + (y + z) \quad \square\end{aligned}$$

定理 4. C 含有元素 0 , 对于每个 $x \in C$, 有 $0 + x = x$

证明. 设 $x = (a, b)$

$$x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x \quad \square$$

定理 5. $\forall x \in C, \exists -x \in C$, 满足 $x + (-x) = 0$

证明. 设 $x = (a, b)$, 令 $-x = (-a, -b)$, 则 $x + (-x) = 0$ □

1.2.2 乘法

定理 6. 如果 $x \in C, y \in C$, 那么 $x \times y \in C$.

证明. 显然 □

定理 7. 如果 $x \in C, y \in C$, 那么 $x \times y = y \times x$.

证明. 设 $x = (a,b), y = (c,d)$.

$$\text{则 } x \times y = (a,b)(c,d) = (ac,bd) = (ca,bd) = y \times x \quad \square$$

定理 8. 如果 $x, y, z \in \mathbf{C}$, 那么 $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

证明. 设 $x = (a,b), y = (c,d), z = (e,f)$

则

$$\begin{aligned} (x \times y) \times z &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= x \times (y \times z) \end{aligned} \quad \square$$

定理 9. \mathbf{C} 含有元素 $1 \neq 0$, 对于每个 $x \in \mathbf{C}$, 有 $1 \times x = x$

证明. 设 $x = (a,b)$

$$1 \times x = (1, 0)(a, b) = (a, b) \quad \square$$

定理 10. 如果 $x \in \mathbf{C}$ 且 $x \neq 0$, 则 $\exists 1/x \in \mathbf{C}$, 满足 $x \times 1/x = 1$.

证明. 设 $x = (a,b)$. 如果 $x \neq 0$, 则 $x \neq 0$ 或 $y \neq 0$. $\therefore a^2 + b^2 > 0$. 于是我们可以定义

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\text{则 } x \times \frac{1}{x} = (1, 0) = 1. \quad \square$$

1.2.3 分配律

定理 11. 如果 $x, y, z \in \mathbf{C}$, 那么 $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

证明. 设 $x = (a,b), y = (c,d), z = (e,f)$

则

$$\begin{aligned} x \times (y + z) &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= x \times y + x \times z \end{aligned} \quad \square$$

1.3 复数的代数形式

至此, 我们已经证明 C 满足域的 11 条公理。我们称由所有复数组成的集合为复数域。可以证明, 集合 $\{(a, 0) | a \in R\}$ 构成 C 的一个子域, 并且拥有和实数域完全相同的运算性质, 于是我们把 R 看作是 C 的一个子集, 并定义

定义 2. 复数 $(a, 0)$ 简写为 a

定义 3. 复数 $(0, 1)$ 简写为 i

于是由此可得

定理 12. $(a, b) = a + bi$

证明. $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$ □

定义 4. 对于每个复数 (a, b) , a 称为该复数的实部, 记做 $\text{Re}(z)$ 。 b 称为该复数的虚部, 记做 $\text{Im}(z)$ 。

定义 5. 若 $z=(a, b)$, 则 $\bar{z} = (a, -b)$ 叫做 z 的共轭

定理 13.

$$i^2 = -1$$

证明. $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ □

定理 14. $\forall z, w \in C$, 满足:

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \times \bar{w}$
3. 如果 $z \neq 0$, 则 $z\bar{z} \in R^+$

证明. 显然, 证明从略。 □

1.4 复数的模

定义 6.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

称作 z 的绝对值, 或 z 的模。

定理 15. $\forall z, w \in \mathbb{C}$, 满足:

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|z\bar{z}| = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$
5. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

证明. 1. 显然

2. 显然

3. 显然

4. 显然

5. 先证 $|z + w| \leq |z| + |w|$

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + \bar{z}w + z\bar{w} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

□

定理 16. 每个非零复数有且仅有两个复方根。

证明.

□

2 复向量空间