一些证明

孙长明

2010/10/29

1. 求和: $S=\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$

   证明.

$$
\begin{aligned}
\because n^3 &= \sum_{i=1}^{n}[i^3-(i-1)^3] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(3*i^2-3*i+1) \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 3S - 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\
\therefore 3S &= n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n \\
\therefore S &= \frac{2n^3+3n^2+1}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

□

2. 求和: $S=\sum\limits_{i=1}^{n} i^3$

证明.

$$
\begin{aligned}
\because n^4 &= \sum_{i=1}^{n}[i^4-(i-1)^4] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(4i^3-6i^2+4i-1) \\
&= 4\sum_{i=1}^{n}i^3-6\sum_{i=1}^{n}i^2+4\sum_{i=1}^{n}i-n \\
&= 4S-6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\times\frac{n(n+1)}{2}-n \\
\therefore 4S &= n^4-n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)-n \\
\therefore S &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

□

3. **已知:** $abc=1, a, b, c \in R$

求证: $(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) \leqslant 1$

证明.

$$
\begin{aligned}
(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) &= bc(a-1+\frac{1}{b})\times ac(b-1+\frac{1}{c})\times ab(c-1+\frac{1}{a}) \\
&= (1-bc+c)(1-ca+a)(1-ab+b) \\
&= (1-\frac{1}{a}+c)(1-\frac{1}{b}+a)(1-\frac{1}{c}+b)
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
(a-1+\frac{1}{b})(1-\frac{1}{b}+a) &\leqslant [\frac{(a-1+\frac{1}{b})+(1-\frac{1}{b}+a)}{2}]^2=a^2 \\
(b-1+\frac{1}{c})(1-\frac{1}{c}+b) &\leqslant [\frac{(b-1+\frac{1}{c})+(1-\frac{1}{c}+b)}{2}]^2=b^2 \\
(c-1+\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a}+c) &\leqslant [\frac{(c-1+\frac{1}{a})+(1-\frac{1}{a}+c)}{2}]^2=c^2
\end{aligned}
\right\}
$$

$\Rightarrow (a-1+\frac{1}{b})(1-\frac{1}{b}+a)(b-1+\frac{1}{c})(1-\frac{1}{c}+b)(c-1+\frac{1}{a})(1-\frac{1}{a}+c) \leqslant$ $a^2b^2c^2=1 \Rightarrow (a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) \leqslant \sqrt{1}=1$ □

4. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} = a$

证法一

证明. 根据数列极限的定义来证明：假设 a=0, 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，根据数列极限的定义，有 $\forall\epsilon > 0$,$\exists N_1$, 当 $n \leq N_1$ 时，有 $|a_n| < \frac{\epsilon}{2}$，于是

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n|}{n}$$

$$= \frac{|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_{N1}|}{n} + \frac{(n - N_1)\epsilon}{2n}$$

下面要证明上式的右端小于 ϵ。由于 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_{N1}|$ 是定数，所以 $\exists N_2$, 使得当 $n > N_2$ 时有 $\frac{|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_{N1}|}{n} < \frac{\epsilon}{2}$。所以当 $n > \max N_1, N_2$ 时，

$$\frac{|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_{N1}|}{n} + \frac{(n - N_1)\epsilon}{2n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

，于是根据极限的定义即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。当 $a \neq 0$ 时，令 $b_n = a_n - a$，则可由上面的结论得

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} - a) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n - na}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = a$$

□

证法二

证明. 令 $x_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$，$y_n = n$ ，显然数列 y_n 是单调递增的无穷大量，所以代人 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = a$$

□

5. 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a_n \geq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = a$

证明. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$，又因为 e^x 在 R 上连续，所以

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2a_3\dots a_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\ln a_3+\cdots+\ln a_n)}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\ln a_3+\cdots+\ln a_n)} = e^{\ln a} = a$$

□

6. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

证明. 令 $a_n = \frac{n}{n-1}$(令 $a_1 = 1$)，应用上题的结论可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$ □

7. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\ldots+a_nb_1}{n} = ab$
说明：这个问题是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} = a$ 的推广。

证明. 证明：假设 a=0 并且 b=0。由 a_n 收敛到 0 可知 a_n 有界，即 $\exists M > 0$，使得 $|a_n| \le M(\forall n \in N)$。

$$0 < \left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\ldots+a_nb_1}{n}\right| \le M\frac{b_n+b_{n-1}+b_{n-2}+\ldots+b_1}{n} \to 0$$

当 $ab \neq 0$ 时，令 $x_n = a_n - a, y_n = b_n - b$, 配合 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} = a$ 可轻松得到结论。 □